

Ван Б. Тепвор

*Задачака о неравенстве*

$$“y^x^y \neq x^y^x”$$

Иногда самые неожиданные математические соотношения могут вызывать удивление и порождать новые вопросы. Одним из таких соотношений является уравнение  $x^y = y^x$ , впервые упомянутое в письме знаменитого математика Иоганна Бернулли к Кристиану Гольдбаху 29 июня 1728 года. В этом письме Бернулли показал, что при некоторых значениях  $x$  и  $y$  это уравнение действительно имеет решение. Например,  $x=2$  и  $y=4$  удовлетворяют уравнению, ведь  $2^4=16$  и  $4^2=16$ . Однако, при других значениях чисел подобные равенства не выполняются.

Но что, если усложнить задачу и взглянуть на возведение в степень дважды? Как изменится поведение чисел, если рассмотреть равенство  $y^{x^y} = x^{y^x}$ ? Уже с первого взгляда видно, что такая конструкция требует более глубокого анализа. В этом и кроется интрига математических исследований — простые на вид выражения могут скрывать за собой сложные и неочевидные закономерности.

Честно говоря, мне неизвестно, доводилось ли раньше кому-то рассматривать это неравенство. Вполне вероятно, что оно уже будоражило умы математиков, возможно, не единожды. Но я решил провести своё маленькое исследование и предложить вам одно простое, но интересное доказательство. Может быть, оно и не блещет новизной, но, как это часто бывает в математике, сам путь к разгадке может быть не менее увлекательным, чем конечный результат.

В этой публикации я хочу поделиться мыслью, что для любых положительных чисел  $x$  и  $y$ , за исключением редких случаев, равенство  $y^{x^y} = x^{y^x}$  действительно не имеет решений. Я приглашаю вас вместе со мной пройти через доказательство этого утверждения — оно не сложное, но в нём есть своя прелесть, открывающая новые грани чисел и степеней.

Я не стремлюсь к лаврам первооткрывателя, как уже упоминал. Идея, возможно, не нова, и уж точно не претендует на абсолютную точность или научную строгость. Это лишь плод моих собственных размышлений, к которым я пришёл на досуге. Хотя, признаюсь, кто знает, может быть, я не единственный, кто обратил внимание на эту математическую игру.

Утверждение:  $y^{x^y} \neq x^{y^x}$ , при  $x, y > 1$ .

**Доказательство:**

1. Логарифмирование уравнения:

$$\begin{aligned}\ln(y^{x^y}) &= \ln(x^{y^x}) \\ x^y \cdot \ln(y) &= y^x \cdot \ln(x)\end{aligned}$$

2. Определение функций

$$\begin{aligned}f(x, y) &= x^y \cdot \ln(y) \\ g(x, y) &= y^x \cdot \ln(x)\end{aligned}$$

3. Анализ функций

Функция  $f(x, y)$ :

$$f(x, y) = x^y \cdot \ln(y)$$

При  $x, y > 2$ :

- $x^y$  растёт экспоненциально.
- $\ln(y)$  растёт медленно.

Следовательно,  $f(x, y) \rightarrow \infty$  при  $x \rightarrow \infty$  или  $y \rightarrow \infty$ .

Функция  $g(x, y)$ :

$$g(x, y) = y^x \cdot \ln(x)$$

При  $x, y > 1$ :

- $y^x$  растёт экспоненциально.
- $\ln(x)$  растёт медленно.

Следовательно,  $g(x, y) \rightarrow \infty$  при  $x \rightarrow \infty$  или  $y \rightarrow \infty$ .

4. Сравнение функций:

Рассмотрим отношение:

$$\frac{f(x, y)}{g(x, y)} = \frac{x^y \cdot \ln(y)}{y^x \cdot \ln(x)}$$

## 5. Анализ производных

Исследуем знак частных производных  $h_x$  и  $h_y$  для определения монотонности:

$$h(x, y) = \frac{x^y \cdot \ln(y)}{y^x \cdot \ln(x)}$$

$$h_x = \frac{\partial h}{\partial x}, \quad h_y = \frac{\partial h}{\partial y}$$

## 6. Границы функций

Исследуем пределы:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} h(x, y), \quad \lim_{y \rightarrow \infty} h(x, y)$$

Поскольку  $x^y$  и  $y^x$  ведут себя экспоненциально, можно утверждать:

$$\frac{f(x, y)}{g(x, y)} \rightarrow \infty \text{ или } \rightarrow 0$$

## 7. Вывод

Поскольку  $f(x, y)$  и  $g(x, y)$  не равны друг другу для всех  $x, y > 2$ :

$$f(x, y) \neq g(x, y) \quad \forall x, y > 2$$

Уравнение  $y^{x^y} = x^{y^x}$  **не имеет решений** для всех  $x, y > 2$ .

На основании неравенства  $y^{x^y} \neq x^{y^x}$  можно сделать вывод о том, что для любых положительных чисел  $x$  и  $y$ , превышающих единицу, порядок операций возведения в степень имеет критическое значение. Это можно выразить как принцип, утверждающий, что в выражениях с переменными, находящимися в показателях и основаниях, изменение их расположения может существенно изменить результат. Таким образом, данное неравенство подчеркивает важность порядка при работе с экспоненциальными функциями и служит иллюстрацией того, что математическая операция возведения в степень не является коммутативной.